

## 再谈阶乘

我们在第 5 章中学习过阶乘。本节，我们再来谈谈阶乘的递归定义。

### 阶乘的递归定义

在第 5 章中，我们将  $n$  的阶乘  $n!$  定义如下。

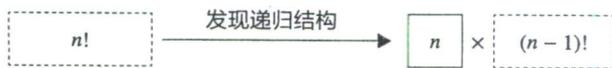
$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

但按照这个定义，“0 的阶乘”意义不明确。因此，另外定义了  $0! = 1$ 。

本章，我们要如下递归地定义阶乘。这可称为阶乘的递推公式。这样的定义既能明晰  $0!$  的值，又能省略上面式子中的“...”部分。

$$n! = \begin{cases} 1, & (n = 0 \text{ 时}) \\ n \times (n-1)!, & (n = 1, 2, 3, \dots \text{ 时}) \end{cases}$$

之所以将它称作递归定义是因为“它使用了阶乘  $(n-1)!$  来定义阶乘  $n!$ ”。你能发现定义中出现的下述递归结构吗？



该式虽然使用阶乘自身来进行定义，但却不会循环无解。对于 0 以上的任一整数， $n!$  的定义都很明确，因为使用了比  $n!$  低一层的  $(n-1)!$  来定义  $n!$ 。

例如，从阶乘的递归定义出发来看一下  $3!$ 。通过定义可知

$$3! = 3 \times 2!$$

再根据递归定义展开右边的  $2!$  可得

$$2! = 2 \times 1!$$

继续根据递归定义展开  $1!$  可得